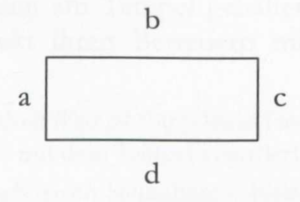
Originalveröffentlichung in: Martina Ullmann (Hrsg.), Und eines Tages, da erbauten sie die Pyramiden – aber wie? Eine kleine Hommage an Frank Müller-Römer, [Haar, Kr. München] 2011, S. 26–31

DAS UNMÖGLICHE MÖGLICH MACHEN? EINIGE MERKWÜRDIGE ÄGYPTISCHE FELDER

von Friedhelm Hoffmann

Für den Ingenieur F. Müller-Römer, der sich in seiner ägyptologischen Dissertation mit dem Pyramidenbau beschäftigt hat,[1] wird der hier veröffentlichte Beitrag zu einem Problem der ägyptischen Feldergeometrie hoffentlich einen willkommenen Ausflug in die zweidimensionale Welt darstellen – dies umso mehr, als der Ausgangspunkt in meiner Beschäftigung mit der „Null" in Ägypten lag,[2] über die ich am 10. Februar 2011 meine Antrittsvorlesung in München hielt. Der Termin war nicht zufällig ein Donnerstag. Vielmehr wurde er im Zusammenhang mit den Vorträgen des Collegium Aegyptium gewählt, dessen Vorsitzender F. Müller-Römer ist. Die aus Anlaß seines 75. Geburtstages herausgegebene Festschrift stellt für mich eine gute Gelegenheit dar, dem Jubilar für seinen unermüdlichen Einsatz für das ägyptologische Institut der Ludwig-Maximilians-Universität München herzlich zu danken. F. Müller-Römer hat manches unmöglich Scheinende möglich gemacht. Ich wünsche ihm noch viele Jahre in Gesundheit und froher Schaffenskraft.

Die Ägypter haben die Fläche (A) von Feldern



bekanntlich nach einer Näherungsformel berechnet, in der die Seitenlängen (a, b, c, d) in folgender Weise zugrundegelegt werden: $A \approx (a + c) : 2 \times (b + d) : 2$, wobei a und c bzw. b und d jeweils einander gegenüberliegende Seiten sind. In der täglichen Verwaltungsroutine ersparte man sich das Zeichnen eines Viereckes, sondern notierte die Längen der vier Felderseiten einfach an einem langen Strich:

b
a ———————— c
d

Die ägyptische Formel wurde auch für die näherungsweise Berechnung der Fläche unregelmäßiger Vierecke benutzt. Und sogar Dreiecksflächen wurden nach derselben Formel ermittelt, indem eine Seite einfach als nicht vorhanden angesetzt wurde, z.B. $A \approx a : 2 \times (b + d) : 2$.[3]

[1] F. Müller-Römer: Die Technik des Pyramidenbaus im Alten Ägypten. München 2008 (= Münchner Studien zur Alten Welt 4).

[2] Vgl. F. Hoffmann: Astronomische und astrologische Kleinigkeiten IV: Ein Zeichen für „Null" im P. Carlsberg 32? In: Enchoria 29 (2004/2005) S. 44–52.

[3] Es tut hier nichts zur Sache und bildet auch kein besonderes Problem, daß nur wenige Dreiecksflächen im überlieferten ägyptischen Corpus, das sich übrigens wenigstens bis ins neunte nachchristliche Jahrhundert erstreckt (vgl. M. R. M. Hasitzka: Neue Texte und Dokumentation zum Koptisch-Unterricht. Wien 1990 [= MPER N.S. 18], S. 274, S. 281 und

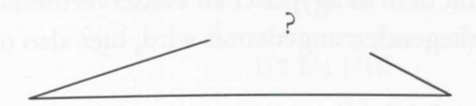
Eine verblüffende Schwierigkeit ergibt sich nun aus der Tatsache, daß einige der in ägyptischen Texten überlieferten Felder geometrisch schlicht unmöglich sind.[4] Ich kenne folgende Fälle:
Das erste merkwürdige Feld ist im P. Reinhardt 7.21[5] aus dem 10. Jh. n. Chr. verzeichnet:

4 [1/2][6]

10 ———————— (=) [1]6 1/4

2

Ich möchte zunächst darauf hinweisen, daß in den Feldertexten nur die Bruchzahlen 1/2, 1/4, 1/8, 1/16 und 1/32 vorkommen. Gemeint sind bei den Längenangaben Teile des „Meßbandes" zu 52,5 m, bei den Flächenangaben Teile der Arure zu 52,5 × 52,5 = 2756,25 m². Noch kleinere Zahlen werden in „Bodenellen" notiert. Das hier als erstes vorgestellte Feld ist sichtlich dreieckig; denn nur drei Längenangaben und die Fläche sind angegeben. Die Rechnung ist zu verstehen als 10 : 2 × (4,5 + 2) : 2 = 16,25. Die Zahlen sind vom Herausgeber korrekt ergänzt worden, wie auch die Summe, die für die Fläche dieses und der nächsten drei Felder am Ende der Zeile 22 im Text angegeben wird, in aller Deutlichkeit zeigt: [1]6 1/4 + 22 + 4 1/2 + 2 1/4 = 45. An der Ergänzung zu [1]6 1/4 für die Fläche des ersten Feldes führt daher kein Weg vorbei. Damit ist auch die Ergänzung 4 [1/2] gesichert. Aber wie soll man sich ein Dreieck mit den Kantenlängen 10, 4,5 und 2 vorstellen? Denn 4,5 + 2 sind nur 6:



Das zweite Beispiel stammt aus demselben Papyrus; es ist die Stelle P. Reinhardt 8.32. Dieses Mal haben wir es mit einem Viereck zu tun:

2

10 ———————— 2 (=) [1]2

2

Leider ist die weitere Rechnung nicht verläßlich nachprüfbar; die in Zeile 34 angegebene Summe 19 1/2 ist wohl um 10 zu niedrig. Folgende Felderflächen werden nämlich offenbar addiert (Zeilen 32–34): 1/4 + 1/2 + [1]2 + 5 1/8 + 7 [1/2 1/8][7] + 2 1/4 + 1 1/2 1/4 = 19(!) 1/2; es müßte 29 1/2 heißen, wenn der

Taf. 138 [Text Nr. 331, Probleme 1 und 2]), nicht gleichschenklig sind (U. Girndt: Einige vermessungstechnische Aspekte der Schenkungsurkunden von Edfu. In: Göttinger Miszellen 149 [1995] S. 41–52). Neben den bei Hasitzka vorkommenden koptischen Felderaufgaben ist auch das bei D. Meeks: Le grand texte des Donations au temple d'Edfou. Kairo 1972 (= BdE 59), S. 159 und S. 50*,16 genannte Feld nicht gleichschenklig.

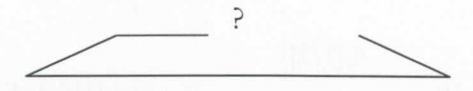
[4] Ich danke K. Stocker sehr herzlich dafür, daß er im Anschluß an meine Antrittsvorlesung zu mir gekommen ist und mich auf das Problem aufmerksam gemacht hat, über das ich, nachdem ich weitere auffällige Felder gefunden hatte, nun diese Zeilen schreibe.

[5] S. P. Vleeming: Papyrus Reinhardt. An Egyptian Land List from the Tenth Century B.C. Berlin 1993 (= Hieratische Papyri aus den Staatlichen Museen zu Berlin Preußischer Kulturbesitz Lieferung 2), S. 26 und Taf. 6. Vleeming op. cit. S. 10 und S. 62 hat diesen Eintrag unter den Gesichtspunkten der Berechnung ausführlicher herangezogen. Er hat aber nicht das geometrische Problem gesehen.

[6] In eckigen Klammern sind Ergänzungen zerstörter Stellen eingeschlossen.

[7] Die Stammbruchreihen sind additiv zu verstehen: 1/2 1/8 ist die ägyptische Ausdrucksweise für 5/8.

Text vom Herausgeber richtig verstanden wird.[8] Das Viereck, um das es hier geht, kann, da 2 + 2 + 2 erst 6 ergeben, aber jedenfalls nicht geschlossen werden:



Der dritte Fall stammt aus dem ptolemäischen P. Kairo CG 31073 Teil A, gedrehtes Verso 2.22.[9] Der Herausgeber liest:

3 1/2 1/4

26 1/4 1/8 1/32 ———————— 6 1/2 1/4

3 1/16

Wieder könnte man die Seiten nicht zu einem Viereck zusammenschließen, da die drei kürzeren in der Summe erst 13 9/16 ergäben. Ich glaube aber, daß dieses Beispiel als Beleg für unmögliche Felder auszuscheiden ist. Abgesehen davon, daß der Herausgeber in irritierender Weise die Zahlen vor und nach dem Felderstrich vertauscht,[10] ist dem Bearbeiter meiner Meinung nach ein Lesefehler unterlaufen. Die Einerzahl unter dem Strich ist nach meinem Dafürhalten nämlich als 4 zu lesen. Ferner kann man hinter dem Strich einen Punkt ergänzen,[11] mit dem in ägyptischen Feldervermessungsakten die Gleichheit der Länge dieser Seite mit der gegenüberliegenden angedeutet wird, hier also 6 1/2 1/4:

3 1/2 1/4

6 1/2 1/4 ———————— [·] (=) 26 1/4 1/32 ... ...

4 1/16

Es ist ärgerlich, daß das Ende der Zeile nicht lesbar ist. Aber auch so möchte ich die Vermutung wagen, daß es sich um ein normales Viereck handelt, und 26 1/4 1/32 ... ... der Flächeninhalt ist. Rein rechnerisch müßten es, 26 47/128 sein. 11/128 fehlen. Aber es ist immer mit Rundungen zu rechnen. Es gibt außerdem eine Ligatur für 1/16 + 1/32 (das sind 12/128!), die dem Zeichen für 1/32 sehr ähnlich sieht.[12] Ist sie hier anstelle von 1/32 zu lesen? Es mag auch das am Zeilenende Stehende[13] die Differenz erklären können. Wie auch immer, als sicheren Beleg für ein unmögliches Feld wird man diese Stelle besser nicht werten wollen.

Außen vor lasse ich lieber auch das Feld im ptolemäischen Ostrakon Leiden Inv. Nr. AES. 34, wo in Zeile x+4 vom Herausgeber verstanden wird:[14]

[8] Vgl. Vleeming op. cit. S. 28 Fn. 9.

[9] Ed. A. Monson: An Early Ptolemaic Land Survey in Demotic: P. Cair. II 31073. Version 2.0. January 2007 (= Princeton/Stanford Working Papers in Classics No. 010705 (online unter http://www.princeton.edu/~pswpc/pdfs/monson/010705.pdf), S. 50 und Taf. 14.

[10] Das scheint Absicht zu sein, da er das regelmäßig tut.

[11] Auch Monson op. cit. S. 50 Fn. 120 hat schon erwogen, die 26 1/4 1/32 ... ... durch einen Punkt vom Felderstrich zu lösen, hat aber nicht daran gedacht, daß es sich um die Felderfläche handeln könnte.

[12] W. Erichsen: Demotisches Glossar. Kopenhagen 1954 S. 706.

[13] Eine Angabe in Bodenellen?

[14] M. A. A. Nur el-Din: The Demotic Ostraca in the National Museum of Antiquities at Leiden. Leiden 1974 (= Collections

1/2 1/4 1/8
4 ———— · (=) 4 1/4 1/32 Aruren
1/2 1/4 1/16

Das Wort „Aruren“ ist oberhalb der Zeile nachgetragen. Der Herausgeber hat gesehen, daß die Rechnung nicht stimmt.[15] Denn

1/2 1/4 1/8
4 ———— ·
1/2 1/4 1/16

hätte eine Fläche von 3 1/4 1/8 – der Punkt würde, wie üblich, anzeigen, daß nach dem Felderstrich dieselbe Zahl wie vor ihm zu denken ist, in diesem Fall also 4. Leider werden viel zu oft ägyptische Texte publiziert, indem man antike Rechenfehler annimmt und man sich mit einem mangelhaften Textverständnis zufrieden gibt. Doch wenn etwas nicht stimmt, so ist es in der Regel das moderne Verständnis des Textes,[16] so meiner Meinung nach auch im vorliegenden Fall. Weder auf dem Faksimile noch auf dem Foto[17] ist ein Punkt hinter dem Felderstrich zu entdecken. Setzt man daher versuchsweise

1/2 1/4 1/8
4 ————
1/2 1/4 1/16

an, also ein Dreieck, müßte die Fläche 1 1/2 1/8 1/16 sein, was mit der nachfolgenden Flächenangabe 4 1/4 1/32 Aruren auch nicht übereinstimmt. Außerdem wäre das Feld geometrisch unmöglich:

?

Am einfachsten dürfte es sein, die Nachtragung von „Arure“ als begonnene, aber nicht zu Ende geführte Korrektur des Schreibers zu werten, der bemerkte, daß er zu dem völlig normalen Feld

1/2 1/4 1/8
4 ———— 4 1/4 1/32
1/2 1/4 1/16

auch noch die Fläche ausrechnen sollte. Das hätte er dann einfach vergessen:

1/2 1/4 1/8
4 ———— 4 1/4 1/32 (=) Aruren: <...>[18]
1/2 1/4 1/16

of the National Museum of Antiquities at Leiden 1), Nr. 80 S. 67 f., S. 595 und Taf. 7.

[15] Nur el-Din op. cit. S. 68.

[16] Vgl. z.B. K.-Th. Zauzich: Ehrenrettung für einen demotischen Buchhalter. In: Orientalia 56 (1987) S. 74–75.

[17] Nur el-Din op. cit. S. 595 und Taf. 7.

[18] Was der antike Schreiber vergessen hat, wird in den modernen Editionen in spitzen Klammern ergänzt.

/2 1/4 1/8 1
4 ―――――― · (=) 4 1/4 1/32 Aruren
/2 1/4 1/16 1

Das Wort „Aruren“ ist oberhalb der Zeile nachgetragen. Der Herausgeber hat gesehen, daß die Rechnung nicht stimmt.[15] Denn

1/2 1/4 1/8
4 ―――――― ·
1/2 1/4 1/16

hätte eine Fläche von 3 1/4 1/8 – der Punkt würde, wie üblich, anzeigen, daß nach dem Felderstrich dieselbe Zahl wie vor ihm zu denken ist, in diesem Fall also 4. Leider werden viel zu oft ägyptische Texte publiziert, indem man antike Rechenfehler annimmt und man sich mit einem mangelhaften Textverständnis zufrieden gibt. Doch wenn etwas nicht stimmt, so ist es in der Regel das moderne Verständnis des Textes,[16] so meiner Meinung nach auch im vorliegenden Fall. Weder auf dem Faksimile noch auf dem Foto[17] ist ein Punkt hinter dem Felderstrich zu entdecken. Setzt man daher versuchsweise

1/2 1/4 1/8
4 ――――――
1/2 1/4 1/16

an, also ein Dreieck, müßte die Fläche 1 1/2 1/8 1/16 sein, was mit der nachfolgenden Flächenangabe 4 1/4 1/32 Aruren auch nicht übereinstimmt. Außerdem wäre das Feld geometrisch unmöglich:

?

Am einfachsten dürfte es sein, die Nachtragung von „Arure“ als begonnene, aber nicht zu Ende geführte Korrektur des Schreibers zu werten, der bemerkte, daß er zu dem völlig normalen Feld

1/2 1/4 1/8
4 ―――――― 4 1/4 1/32
1/2 1/4 1/16

auch noch die Fläche ausrechnen sollte. Das hätte er dann einfach vergessen:

1/2 1/4 1/8
4 ―――――― 4 1/4 1/32 (=) Aruren: <...>[18]
1/2 1/4 1/16

of the National Museum of Antiquities at Leiden 1), Nr. 80 S. 67 f., S. 595 und Taf. 7.

[15] Nur el-Din op. cit. S. 68.

[16] Vgl. z.B. K.-Th. Zauzich: Ehrenrettung für einen demotischen Buchhalter. In: Orientalia 56 (1987) S. 74–75.

[17] Nur el-Din op. cit. S. 595 und Taf. 7.

[18] Was der antike Schreiber vergessen hat, wird in den modernen Editionen in spitzen Klammern ergänzt.

Die zwei im P. Reinhardt zu findenden Fälle von geometrisch merkwürdigen Feldern, einem dreieckigen und einem viereckigen, bleiben zunächst als Probleme bestehen. Sie stehen in einem wirklichen Verwaltungstext. Geometrisch sinnlose Zahlen mußten Leuten, die tagtäglich mit der Vermessung von Feldern zu tun hatten, eigentlich aufgefallen sein, zumal einige Flächen im P. Reinhardt auch einfach als „geschätzt“[19] angegeben werden, was für den geübten Blick und das Vorstellungsvermögen der Feldervermesser spricht. Unsere beiden seltsamen Felder wurden ganz normal nach der bekannten Formel aus den angegebenen Seitenlängen berechnet. Ich gebe gerne zu, daß ich das Problem nicht lösen kann, denn ich möchte ungern dem antiken Schreiber leichtfertig einen Fehler unterstellen. Freilich mag man argumentieren, bei stumpfsinniger Verwaltungsroutine könnten auch an sich sinnlose Zahlen rein mechanisch durchgerechnet worden sein. Man müßte dann versuchen, eine plausible Emendation der Texte zu finden.

Für P. Reinhardt 8.32 könnte man eine vergessene 10 erwägen und die Zehnerzahl der Summe entsprechend als 20 ergänzen:

2
10 ———— <1>2 (=) [2]2
2

Das würde allerdings im Vergleich zu allen anderen im P. Reinhardt festgehaltenen Felder ein ungewöhnlich großes Stück Land sein. Aber die Annahme, daß der Schreiber die Zehnerzahl nach dem Felderstrich vergessen hätte, wäre mit dem nachfolgenden Text keineswegs unvereinbar. Denn dann würde sich als Summe der Felderflächen in den Zeilen 32–34 ergeben: 1/4 + 1/2 + [2]2 + 5 1/8 + 7 [1/2 1/8] + 2 1/4 + 1 1/2 1/4 = 39 1/2. Im Text steht nun, wie gesagt, als Summe 19 1/2. Nach der bisherigen Auffassung ([1]2 statt [2]2) müßte man annehmen, der Schreiber habe bei der Summe statt 29 1/2 vielmehr 19 1/2 geschrieben, also das Zeichen für 10 anstelle der 20 geschrieben. Nach meiner Überlegung müßte lediglich unterstellt werden, der Schreiber habe eine 10 statt einer 30 notiert. Das könnte etwa bei der Übertragung von Vermessungsnotizen in das Felderregister des P. Reinhardt geschehen sein, so daß andere Leute, die die Felder nie gesehen haben, anschließend die Felderflächen berechnet haben. Die Zeichen für 10, 20 und 30 sehen in der Handschrift des P. Reinhardt jedenfalls einander recht ähnlich,[20] so daß ein derartiger Fehler nicht ganz unplausibel erscheint. Für den vorliegenden Fall ist also abzuwägen, ob man zwei Schreibfehler (das Vergessen eines Zehners am Felderstrich und Verschreibung der Summe zu 19 1/2 statt 39 1/2) oder nur einen (Verschreibung der Summe zu 19 1/2 statt 29 1/2) und dafür aber zusätzlich eine unmögliche Feldergeometrie für wahrscheinlicher hält.

Für P. Reinhardt 7.21 – und damit komme ich zum allerersten hier vorgestellten Feld zurück – sehe ich zu

4 [1/2]
10 ———— (=) [1]6 1/4
2

keine Alternative. Mit der Flächenzahl 16 1/4 ist jedenfalls weitergerechnet worden, wie die oben zitierte Summierung mit weiteren Felderflächen beweist. Eine Wiederherstellung des Textes z.B. als

---

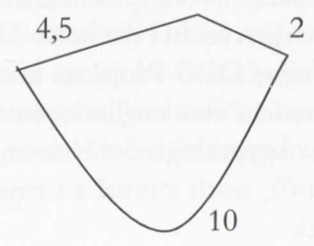
[19] Vleeming op. cit. S. 63.

[20] Vgl. z.B. 10 in 10.27, 20 in 10.29 und 30 ebenfalls in 10.29.

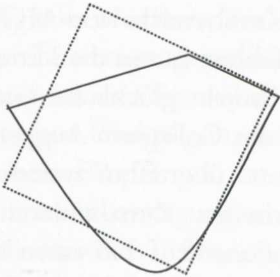
$$10\ \frac{3\ [1/4]}{2}\ \langle\cdot\rangle\ (=)\ [2]6\ 1/4 \quad \text{oder} \quad 10\ \frac{5\ [1/4]}{2}\ \langle\cdot\rangle\ (=)\ [3]6\ 1/4$$

scheidet daher aus. Außerdem ist über dem Felderstrich wirklich eine 4 und keine 3 oder 5 erhalten.

Dieses Feld bleibt also als einziges problematisches übrig. Und vielleicht ist es am einfachsten, hier dann doch ein simples Versehen des Schreibers anzunehmen. Er hätte lediglich eine Zahl vergessen und dann rein mechanisch weitergerechnet. Oder bei der Übertragung von Meßwerten aus den Vermessungsnotizen ist ein Wert vergessen worden, und im Verwaltungsbüro ist auf dieser fehlerhaften Zahlengrundlage nach Schema F die Fläche ausgerechnet worden.
Aber vielleicht liegt die Lösung ganz woanders. Ist denn die Voraussetzung, daß alle Seitenlängen immer gerade sind, zwingend? Könnte es in der Realität nicht vielleicht auch Felder mit einer oder gar mehreren gekrümmten Kanten gegeben haben? Spielt man diesen Gedanken einmal durch, könnte man sich für unseren Problemfall vielleicht folgende Gestalt vorstellen:



Der im ägyptischen Text angegebene Wert käme der tatsächlichen Fläche dieses Gebildes übrigens erstaunlich nahe. Zur Veranschaulichung lege ich ein Quadrat mit der Kantenlänge 4 über die Grafik. Dieses Quadrat hat eine Fläche von 16 Einheiten. Laut Text soll die Fläche des Feldes 16 1/4 betragen:



Natürlich ist die Fläche je nach dem gewählten Winkel[21] der beiden geraden Seiten größer oder kleiner, und ich bin mir darüber im klaren, daß ich mit diesen Zeilen kaum mehr leisten konnte, als auf das Problem hingewiesen zu haben. Aber vielleicht ist es für einen Ingenieur ja eine amüsante Knobelei.

[21] Ein Winkel wird übrigens nie in den ägyptischen Feldertexten angegeben. Die Ägypter hatten nicht einmal einen Begriff davon. Das führt dazu, daß z.B. ein Feld, dessen vier Kanten als je zwei Einheiten angegeben werden, ein Quadrat oder eine mehr oder weniger flache Raute mit größerer oder kleinerer Fläche sein konnte. In der Landesverwaltung wurden trotzdem einfach vier Flächeneinheiten angesetzt. Das war einfacher zu rechnen und bescherte dem Staat, wenn das Feld kein Quadrat war, höhere Einnahmen.